Математическая индукция в олимпиадных задачах

Рассмотрим несколько примеров алгебраических задач, а также доказательство различных неравенств, решаемых с применением метода **математической индукции**.

Задача 1. Угадать формулу для суммы и доказать её. $A(n)= 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + (n+1)\, n^2$.

Решение. 1. Преобразуем выражение для суммы A(n):

$A(n)= 2\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + \ldots + (n+1)\, n^2 = (1+1)\, 1^2 + (2+1)\, 2^2 + \ldots + (n+1)\, n^2=$

$=1\cdot 1^2 + 2\cdot 2^2 + \ldots + n\cdot n^2 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = B(n) + C(n)$,

где $B(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$, $C(n)= 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$.

2. Рассмотрим суммы C(n) и B(n).

а) $C(n) = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Одна из часто встречающихся задач на метод математической индукции, доказать, что для любого натурального n , выполняется равенство

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(n+2)\backslash 6 \qquad (1)$$

Предположим, что (1) верно при всех $n \in N$.

б) $B(n) = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$. Пронаблюдаем, как изменяются значения B(n) в зависимости от n .

$B(1) = 1^3 = 1$.

$B(2) = 1^3 + 2^3 = 9 = 3^2 = (1 + 2)^2$

$B(3) = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = (1+2+3)^2$

Таким образом, можно предположить, что $B(n) = (1 + 2 + \ldots + n)^2 = (n(n+1/2)^2)$ (2)

в) В результате для суммы A(n) получаем

$$A(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3} + \frac{n(n+1)}{2}\right] =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\,\frac{4n+2+3n^2}{6} = \frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{12} = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12} \qquad (*)$$

3. Докажем полученную формулу (*) методом математической индукции.

а) проверим справедливость равенства (*) при n=1.

$$A(1) = 2\cdot 1^2 = 2, \quad \frac{1\cdot(1+1)(1+2)(3\cdot 1+1)}{12} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{12} = 2$$

Очевидно, что формула (*) при n=1 верна.

б) предположим, что формула (*) верна при n=k , где $k \in N$, то есть выполняется равенство

$$A(k)= \frac{k(k+1)(k+1)(3k+1)}{12}$$

Исходя из предположения, докажем справедливость формулы при n=k+1. Действительно,

$$A(k+1)= A(k) + (k+2)(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(k+2)(3k+1)}{12} + (k+2)(k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{12}\cdot\left[k(3k+1) + 12(k+1)\right] = \frac{(k+1)(k+2)}{12}\cdot\left[3k^2 + 13k + 12\right] =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(3k+4)}{12} = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(3(k+1)+1)}{12}$$

Так как формула (*) верна при n=1, и из предположения, что она верна при некотором натуральном k, следует ее справедливость при n=k+1, на основании принципа математической индукции заключаем, что равенство

$$2\cdot 1^2 + 3\cdot 2^2 + \ldots + (n+1)n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

выполняется при всяком натуральном n.

Задача 2 .Вычислить сумму $1 - 2 + 3 - 4 + \ldots (-1)^{n-1} n$.

Решение 1. Выпишем последовательно значения сумм при различных значениях n.

A(1)=1, A(2)=1—2= —1, A(3)=1—2+3=2, A(4)=1—2+3—4= —2,

A(5)=1—2+3—4+5=3, A(6)=1—2+3—4+5—6= —3.

Наблюдая закономерность, можем предположить, что A(n)=-n/2 при четных n и A(n)=(n+1)/2 при нечетных n. Объединим оба результата в единую формулу:

A(n) = $(-1)^{n-1}\cdot\frac{n}{2}+\frac{1}{2}r$, где r – остаток от деления n на 2.

Иr, очевидно, определяется следующим правилом: 0, если n – чётное ,r =1, если n – нечётное.

Тогда r (можно догадаться) представимо в виде: $r=\frac{1}{2}+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$

Окончательно получим формулу для A(n):

$$A(n)=(-1)^{n-1}\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+(-1)^{n-1}\frac{1}{2}\right)=(-1)^{n-1}\frac{n}{2}+(-1)^{n-1}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)+1}{4} \qquad (*)$$

Докажем выполнение равенства (*) при всех n$\in\boldsymbol{N}$ методом математической индукции.

2. а) Проверим равенство (*) при n=1. A(1) = 1= $\frac{(-1)^{1-1}(2\cdot 1+1)+1}{4}=\frac{1\cdot 3+1}{4}$

Равенство справедливо

б) Предположим, что равенство

$$1-2+3-4+\ldots+(-1)^{n-1}n=\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)+1}{4}$$

верно при n=k. Докажем, что оно справедливо и при n=k+1, то есть

$$A(k+1)=\frac{(-1)^{k}(2k+3)+1}{4}$$

В самом деле,

$$A(k+1)=A(k)+(-1)^k(k+1)=\frac{(-1)^{k-1}(2k+1)+1}{4}+(-1)^k(k+1)=$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}(2k+1)+1+(-1)^k(4k+4)}{4}=\frac{(-1)^{k-1}(2k+1-4k-4)+1}{4}=$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}(-2k-3)+1}{4}=\frac{(-1)^k(2k+3)+1}{4}$$

Что и требовалось доказать.

Метод математической индукции применяется также для решения задач на делимость.

Задача 3. Доказать, что число N(n)=n^3 + 5n делится на 6 при любом натуральном n.

Доказательство.

1. При n=1 число N(1)=6 и потому утверждение справедливо.
2. Пусть при некотором натуральном k число N(k)=k^3+5k делится на 6.

Докажем, что N(k+1)= $(k+1)^3$ + 5(k+1) делится на 6.

Действительно, имеем N(k+1)= $(k+1)^3$ + 5(k+1)=(k^3+5k)+3k(k+1)+6.

Поскольку k и k+1 — рядом стоящие натуральные числа, то одно из них обязательно четно, поэтому выражение 3k(k+1) делится на 6. Таким образом, получаем, что N(k+1) также делится на 6. Вывод число N(n)=n^3 + 5n делится на 6 при любом натуральном n.

Задача 4. Доказать, что при любом натуральном n число $3^{2^m}-1$ не делится нацело на число 2^{n+3}.

Доказательство.

1. При n=1 утверждение очевидно, так как 8 не делится на 16.
2. Предположим теперь, что утверждение справедливо при n=k, т.е. число не делится нацело на 2^{k+3}. Докажем тогда, что число $3^{2^{k+1}}-1$ не делится нацело на число 2^{k+4}.

Представим $3^{2^{k+1}}-1$ в виде произведения

$$3^{2^{k+1}}-1=3^{2^k\cdot 2}-1=\left(3^{2^k}\right)^2-1=(3^{2^k}-1)(3^{2^k}+1) \qquad (*)$$

По предположению первый множитель в (*) не делится нацело на число 2^{k+3}, то есть в представлении составного числа $3^{2^k}-1$ в виде произведения простых чисел число 2 повторяется не более чем (k+2) раза. Таким образом, чтобы доказать, что число $3^{2^{k+1}}-1$ не делится нацело на 2^{k+4}, надо доказать, что $3^{2^k}+1$ не делится на 4.

Для доказательства этого утверждения докажем вспомогательное утверждение: для любого натурального n число $3^{2n}+1$ не делится на 4. Для n=1 утверждение очевидно, так как 10 не делится на 4 без остатка. При предположении, что $3^{2k}+1$ не делится на 4, докажем, что и $3^{2(k+1)}+1$ не делится на 4. Представим последнее выражение в виде суммы:

$$3^{2(k+1)}+1=3^{2k+2}+1=3^{2k}\cdot 9+1=(3^{2k}+1)+8\cdot 3^{2k}.$$

Второе слагаемое суммы делится на 4 нацело, а первое не делится. Следовательно, вся сумма не делится на 4 без остатка. Вспомогательное утверждение доказано.

Теперь ясно, что $3^{2^k}+1$ не делится на 4, так как число 2^k является четным числом.

Окончательно получаем, что число $3^{2^n}-1$ не делится нацело на число 2^{n+3} ни при каком натуральном n.

Рассмотрим теперь пример применения индукции к доказательству неравенств.

Задача 5. 8^n+6 кратно 7 при любом целом $n\geq 1$.

Решение. При n=1 утверждение верно. Допустим оно верно при n=k, k – любое натуральное число, т.е. $8^k+6=7m$, m - натуральное число.

Проверим теперь, что утверждение верно и при n=k+1. т.е. $8^{k+1}+6=7t$, t – натуральное число. $8^k=7m-6$. Поэтому $8^{k+1}+6=8\cdot 8^k+6=8(7m-6)+6=7\cdot 8m-42=7(8m-6)$ делится на 7. Утверждение вепно.

Задача 6. Доказать, что при любом натуральном n выражение $3^{2n+2}+2^{6n+1}$ делится на 11.

Решение. При n=1 утверждение верно. Допустим оно верно при n=k, k – любое натуральное число, т.е. $3^{2n+2}+2^{6n+1}=11m$, m - натуральное число. Докажем, что утверждение верно и при при n=k+1. т.е. $3^{2(n+1)+2}+2^{6(n+1)+1}=11p$, p - натуральное число. $3^{2n+2}=11m-2^{6n+1}$. Сумму преобразуем к виду:

$3^{2(n+1)+2}+2^{6(n+1)+1}=3^2\cdot 3^{2(k+1)}+2^{6(k+1)+1}=3^2\cdot(11m-2^{6k+1})+2^{6(k+1)+1}=3^2\cdot 11m-3^2\cdot 2\cdot 2^{6k}+2^7\cdot 2^{6k}=3^2\cdot 11m+$ $+2^{6k}(2^7-2\cdot 3^2)=3^2\cdot 11m+110\cdot 2^{6k}=11(9m+10\cdot 2^{6k})$/

Задача 7. При каких натуральных n справедливо неравенство $2^n>2n+1$?

Решение. 1. При n=1 $2^1<2\cdot 1+1$,при n=2 $2^2<2\cdot 2+1$,при n=3 $2^3>2*3+1$,
При n=4 $2^4>2\cdot 4+1$.

По-видимому, неравенство справедливо при любом натуральном $n\geq 3$. Докажем это утверждение.

2. При n=3 справедливость неравенства уже показана. Пусть теперь неравенство справедливо при n=k, где k – некоторое натуральное число, не меньшее 3, т.е. $2^k>2k+1$ (*)

Докажем, что тогда неравенство справедливо и при n=k+1, то есть $2^{k+1}>2(k+1)+1$. Умножим (*) на 2, получим $2^{k+1}>4k+2$. Сравним выражения 2(k+1)+1 и 4k+2.
4k+2—(2(k+1)+1)=2k—1. Очевидно, что 2k-1>0 при любом натуральном k. Тогда 4k+2>2(k+1)+1, т.е. $2^{k+1}>2(k+1)+1$. Утверждение доказано.

Задача 8. Неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического n неотрицательных чисел (неравенство Коши).

Если a_1, a_2 ,…, a_n - любые неотрицательные числа, то

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \quad (*)$$

Равенство имеет место лишь при $a_1=a_2=...=a_n$

Доказательство. 1. При n=2 неравенство справедливо

$\frac{a_1+a_2}{n}\geq\sqrt{a_1a_2}$ - это неравенство является следствием очевидного неравенства: $\left(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}\right)^2\geq 0$

2. Предположим, что неравенство верно при n=k; докажем, что оно будет верным и при n=2k. Действительно,

$$\frac{a_1+a_2+...+a_{2k}}{2k}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+...+\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}{k}\geq\sqrt[k]{\frac{a_1+a_2}{2}\cdot...\cdot\frac{a_{2k-1}+a_{2k}}{2}}\geq$$

$$\geq\sqrt[k]{\sqrt{a_1a_2}\cdot...\cdot\sqrt{a_{2k-1}a_{2k}}}=\sqrt[2k]{a_1a_2\cdot...\cdot a_{2k-1}a_{2k}}$$

Так как неравенство (*) имеет место при n=2, то оно будет выполняться для n=4, 8,16… и т.д., то есть, вообще, для всякого n= 2^p (p=1,2,3,…)

3. Пусть теперь n-произвольное натуральное число. Если n $\neq 2^p$, то найдём такое натуральное число s, что n+s= 2^p. Тогда для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, ..., a_{n+s}$, согласно доказанному, справедливо неравенство:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n+a_{n+1}+...+a_{n+s}}{n+s}\geq\sqrt[n+s]{a_1a_2\cdot...\cdot a_na_{n+1}\cdot...\cdot a_{n+s}}$$

Положим в этом неравенстве $a_{n+1}=a_{n+2}=...=a_{n+s}=\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$, получим

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n+\frac{(a_1+a_2+...+a_n)s}{n}}{n+s}\geq\sqrt[n+s]{a_1a_2\cdot...\cdot a_n\left(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^s}$$, откуда, обозначив $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=A_n$, будем иметь

$\frac{nA_n+sA_n}{n+s}\geq\sqrt[n+s]{a_1a_2\cdot...\cdot a_nA_n^s}$, найдём, что $A_n\geq\sqrt[n+s]{a_1a_2\cdot...\cdot a_nA_n^s}$

Возведём обе части последнего неравенства в степень (n+s), получим

$A_n^{n+s}\geq a_1a_2\cdot...\cdot a_nA_n^s$, откуда следует, что $A_n^n\geq a_1a_2\cdot...\cdot a_n$, т.е. $A_n\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdot...\cdot a_n}$, или $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{a_1a_2\cdot...\cdot a_n}$

Покажем, что в неравенстве (*) равенство имеет место в том и только в том случае, если $a_1=a_2=...=a_n$.

Ясно, что если $a_1=a_2=...=a_n$, то соотношение (*) превращается в равенство. Докажем, что если хотя бы два из этих чисел не равны между собой, то в (*) левая и правая части не равны между собой.

Пусть $a_1\neq a_2$. Тогда $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}=\frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1+a_2}{2}+a_3+...+a_n}{n}\geq\sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2a_3\cdot...\cdot a_n}$

Так как $a_1\neq a_2$, то $\frac{a_1+a_2}{2}>\sqrt{a_1a_2}$, следовательно,

$\sqrt[n]{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2a_3\cdot...\cdot a_n}>\sqrt[n]{a_1a_2a_3\cdot...\cdot a_n}$, а потому $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}>\sqrt[n]{a_1a_2\cdot...a_n}$ (**)

Задача 9. Докажите, что для любого натурального числа n 3^n+4^n-1 делится на 6.

Доказательство. Доказываемое утверждение справедливо при $n = 1$, так как $3^1 + 4^1 - 1 = 6$, т. е. делится на 6. Предположим, что при $n = k$ сумма $3^k + 4^k - 1$ делится на 6, и докажем, что при $n = k + 1$ сумма $3^{k+1} + 4^{k+1} - 1$ делится на 6. (Успех доказательства зависит от умения учащихся в сумме $3^{k+1} + 4^{k+1} - 1$ выделить сумму $3^k + 4^k - 1$, которая по нашему предположению делится на 6.)

$$3^{k+1} + 4^{k+1} - 1 = 3\cdot3^k + 4\cdot4^k - 1 = 3\cdot3^k + 3\cdot4^k - 3 + 4^k + 2 =$$
$$= 3\cdot(3^k + 4^k - 1) + (4^k + 2).$$

Слагаемое $3\cdot(3^k + 4^k - 1)$ последней суммы делится на 6, так как один из его множителей делится на 6 по нашему предположению. Осталось доказать, что и слагаемое $4^k + 2$ также делится на 6. Применим метод математической индукции еще раз. Очевидно, что при $k = 1$ сумма $4^1 + 2 = 6$ делится на 6. Предположим, что при $k = m$ сумма $4^m + 2$ делится на 6, и докажем, что при $k = m + 1$ сумма $4^{m+1} + 2$ делится на 6. $4^{m+1} + 2 = 4\cdot4^m + 2 = 4\cdot4^m + 8 - 6 = 4\cdot(4^m + 2) - 6$. Слагаемое $4\cdot(4^m + 2)$ делится на 6, так как один из его множителей делится на 6 по нашему предположению, число 6 тоже делится на 6, поэтому и разность $4\cdot(4^m + 2) - 6$, а значит, и сумма $4^{m+1} + 2$ тоже делятся на 6. Тем самым доказано, что сумма $4^k + 2$ делится на 6 для любого натурального k. Но тогда и $3^{k+1} + 4^{k+1} - 1$ делится на 6. Итак, выражение $3^n + 4^n - 1$ делится на 6 при $n = 1$; из предположения, что это выражение делится на 6 при $n = k$, следует, что оно делится на 6 и при $n = k + 1$. Это означает, что выражение $3^n + 4^n - 1$ делится на 6 при любом натуральном числе n.

Задача 10. Докажите, что сумма кубов трех последовательных натуральных чисел делится на 9.

Доказательство. Пусть $M= n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$, где n - любое натуральное число. При делении на 3 числа n может получиться один из трех остатков: 0, 1, 2. Следовательно, множество всех натуральных чисел можно разбить на три непересекающихся класса чисел, имеющих вид $3m$, где $\boldsymbol{N}$, $3m + 1$ или $3m + 2$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$.Докажем, что если число n относится к любому из этих трех классов, то число M делится на 9. 1) Пусть $n = 3m$, где $m \in \boldsymbol{N}$.

Тогда $M = (3m)^3 + (3m + 1)^3 + (3m + 2)^3 = 27m^3 + 27m^3 + 27m^2 + 9m + 1 + 27m^3 + 54m^2 + 36m + 8 = 9k$, где $\boldsymbol{N}$.

2) Пусть $n = 3m + 1$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда $M = (3m + 1)^3 + (3m + 2)^3 + (3(m + 1))^3 = 9p$, где $\boldsymbol{N}$.

3) Пусть $n = 3m + 2$, где $m = 0, 1, 2, \ldots$. Тогда $M = (3m + 2)^3 + (3(m + 1))^3 + (3(m + 1) + 1)^3 = 9q$, где $q \in \boldsymbol{N}$.

Следовательно, в каждом случае натуральное число M делится на 9, что и требовалось доказать.

Задачи 11. Если разность суммы цифр числа, стоящих на четных местах, и суммы цифр, стоящих на нечетных местах, делится на 11, то и число делится на 11.

Доказательство. Рассмотрим доказательство признака делимости на 11 на примере шестизначного натурального числа . Для него справедливы сравнения:

$$= a_6 10^6 + a_5 10^5 + a_4 10^4 + a_3 10^3 + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$
$$a_6(-1)^6 + a_5(-1)^5 + a_4(-1)^4 + a_3(-1)^3 + a_2(-1)^2 + a_1(-1) + a_0 (\text{mod } 11)$$
$$a_6 - a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \ (\text{mod } 11) =$$
$$= (a_6 + a_4 + a_2 + a_0) - (a_5 + a_3 + a_1). \qquad (1)$$

Задача 12. Определите остаток от деления числа 3^{25} на: а) 10; б) 11; в) 13.

Решение. а) Так как , то . Следовательно, 3 - остаток от деления числа 3^{25} на 10.

б) Так как , то . Следовательно, 1 - остаток от деления числа 3^{25} на 11.

в) Так как , то . Следовательно, 3 - остаток от деления числа 3^{25} на 13.

Задача 13. Пусть $P_3(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$. Определите последнюю цифру числа $P_3(10^{2005})$. деления данного числа 20042005200620072008 2009 на 9.

Решение. Так как , то $P_3(0) = 0^3 - 4 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + 1 = 1$. Следовательно, при делении числа $P_3(10^{2005})$ на 10 получается остаток 1, а это означает, что последняя цифра числа $P_3(10^{2005})$ (в его десятичной записи) есть 1.

Задача 14. Пусть $P_{2004}(x) = x^{2004} - x^{2003} + x^{2002} - x^{2001} \ldots - x + 1$. Определите последнюю цифру числа $P_{2004}(100^{2005})$.

Решение. Так как , то $P_{2004}(0). = 0^{2004} - 0^{2003} + 0^{2002} - 0^{2001} \ldots - 0 + 1 = 1$. Следовательно, при делении числа $P_{2004}(100^{2005})$ на 10 получается остаток 1, а это означает, что последняя цифра числа $P_{2004}(100^{2005})$ (в его десятичной записи) есть 1.

Задача 15. Докажите, что квадрат любого натурального числа либо делится на 9, либо при делении на 3 дает остаток 1.

Доказательство. Любое натуральное число n при делении на 3 дает только один из трех остатков: 0, 1, 2. Поэтому возможен лишь один из трех случаев:

1) Если , то $n = 3m$, где $\boldsymbol{N}$. Тогда $n^2 = 9m^2$, т. е. n^2 делится на 9.

2) Если , то , т. е. n^2 при делении на 3 дает остаток 1.

3) Если , то , т. е. n^2 при делении на 3 дает остаток 1.

Таким образом, утверждение полностью доказано.

Задача 16. Доказать, что для любого натурального n справедливо равенство:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=n^2(n+1)^2/4.$$

Решение: 1) Пусть n=1, тогда $X_1=1^3=1^2(1+1)^2/4=1$. Мы видим, что при n=1 утверждение верно.

2) Предположим, что равенство верно при n=k $X_k=k^2(k+1)^2/4$.

3) Докажем истинность этого утверждения для n=k+1,т.е. $X_{k+1}=(k+1)^2(k+2)^2/4$.

$X_{k+1}=1^3+2^3+\ldots+k^3+(k+1)^3=k^2(k+1)^2/4+(k+1)^3=(k^2(k+1)^2+4(k+1)^3)/4=(k+1)^2(k^2+4k+4)/4=(k+1)^2(k+2)^2/4$.

Из приведённого доказательства видно, что утверждение верно при n=k+1, следовательно, равенство верно при любом натуральном n.

<u>Задачи на суммирование</u>

Пример 1. Доказать, что $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Решение: 1) Имеем $n=1=1^2$. Следовательно, утверждение верно при n=1, т.е. A(1) истинно.

2) Докажем, что $A(k) \Rightarrow A(k+1)$.

Пусть k- любое натуральное число и пусть утверждение справедливо для n=k, т.е.

$$1+3+5+\ldots+(2k-1)=k^2.$$

Докажем, что тогда утверждение справедливо и для следующего натурального числа n=k+1, т.е. что $1+3+5+\ldots+(2k+1)=(k+1)^2$.

В самом деле, $1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)=k^2+2k+1=(k+1)^2$.

Итак, $A(k) \Rightarrow A(k+1)$. На основании принципа математической индукции заключаем, что предположение A(n) истинно для любого $n \in N$.

Пример 2. Докажите, что при любом натуральном n справедливо равенство:

$1+2+3+\ldots + n = n(n+1)\backslash 2$.

Р е ш е н и е. У нас имеется последовательность утверждений:

A_1: $1= 1\cdot2\backslash2$; A_2: $1+2= 2\cdot3\backslash2$; A_3: $1+2+3=3\cdot4\backslash2$; . . .

1) База индукции: очевидно, что утверждение A_1 верно.

2) Индукционный переход: пусть верно какое-то утверждение A_k , т. е. верно равенство

$1+2+3+...+k= k(k+1)\backslash2$ (предположение, что Ak верно, называется индукционным предположением). Докажем, что тогда верно утверждение A_{k+1}:

$1+2+3+\ldots+k+(k+1)=k(k+1)\backslash2+(k+1)=k(k+1)\backslash2+2(k+1)\backslash2=(k+1)(k+2)\backslash2$. Но это как раз и есть утверждение A_{k+1}.

Задачи на делимость

Пример 1. Доказать, что ($11^{n+2}+12^{2n+1}$) делится на 133 без остатка.

Решение: 1) Пусть n=1, тогда$11^3+12^3=(11+12)(11^2-132+12^2)=23\times133$.$(23\times133)$ делится на 133 без остатка, значит при n=1 утверждение верно;

2) Предположим, что $(11^{k+2}+12^{2k+1})$ делится на 133 без остатка.

3) Докажем, что в таком случае$(11^{k+3}+12^{2k+3})$ делится на 133 без остатка. Действительно, $11^{k+3}+12^{2л+3}=11\times11^{k+2}+12^2\times12^{2k+1}=11\times11^{k+2}+(11+133)\times12^{2k+1}=11(11^{k+2}+12^{2k+1})+133\times12^{2k+1}$.

Полученная сумма делится на 133 без остатка, так как первое её слагаемое делится на 133 без остатка по предположению, а во втором одним из множителей является 133.

Итак, $A(k)\to A(k+1)$, то опираясь на метод математической индукции, утверждение верно для любых натуральных n.

Пример 2. Доказать, что $3^{3n-1}+2^{4n-3}$ при произвольном натуральном n делится на 11.

Решение: 1) Пусть n=1, тогда $X_1=3^{3-1}+2^{4-3}=3^2+2^1=11$ делится на 11 без остатка. Значит, при n=1 утверждение верно.

2) Предположим, что при n=k $X_k=3^{3k-1}+2^{4k-3}$ делится на 11 без остатка.

3) Докажем, что утверждение верно для n=k+1.

$X_{k+1}=3^{3(k+1)-1}+2^{4(k+1)-3}=3^{3k+2}+2^{4k+1}=3^3*3^{3k-1}+2^4*2^{4k-3}=$

$=27*3^{3k-1}+16*2^{4k-3}=(16+11)*3^{3k-1}+16*2^{4k-3}=16*3^{3k-1}+11*3^{3k-1}+16*2^{4k-3}=16(3^{3k-1}+2^{4k-3})+11*3^{3k-1}$.

Первое слагаемое делится на 11 без остатка, поскольку $3^{3k-1}+2^{4k-3}$ делится на 11 по предположению, второе делится на 11, потому что одним из его множителей есть число 11. Значит и сумма делится на 11 без остатка при любом натуральном n.

Задачи геометрии

Пример 1. Доказать, что сумма S_n внутренних углов любого выпуклого многоугольника равна $(n-2)\pi$, где n - число сторон этого многоугольника: $S_n = (n-2)\pi$ (1).

Это утверждение имеет смысл не для всех натуральных n, а лишь для $n\geq3$, так как минимальное число углов в треугольнике равно 3.

1) При $n=3$ наше утверждение принимает вид: $S_3 = \pi$. Но сумма внутренних углов любого треугольника действительно равна π. Поэтому при $n=3$ формула (1) верна.

2) Пусть эта формула верна при $n=k$, то есть $S_k = (k-2)\pi$, где $k\geq3$. Докажем, что в таком случае имеет место и формула: $S_{k+1} = (k-1)\pi$.

Пусть $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ - произвольный выпуклый $(k+1)$-угольник.

Соединив точки A_1 и A_k, мы получим выпуклый k-угольник $A_1A_2 \ldots A_{k-1}A_k$. Очевидно, что сумма углов $(k+1)$-угольника $A_1A_2 \ldots A_kA_{k+1}$ равна сумме углов k-угольника $A_1A_2 \ldots A_k$ плюс сумма углов треугольника $A_1A_kA_{k+1}$. Но сумма углов k-угольника $A_1A_2 \ldots A_k$ по предположению равна $(k-2)\pi$, а сумма углов треугольника $A_1A_kA_{k+1}$ равна π. Поэтому$S_{k+1}= S_k + \pi = (k-2)\pi + \pi = (k-1)\pi$.

Итак, оба условия принципа математической индукции выполняются, и потому формула (1) верна при любом натуральном $n\geq3$.

Пример 2. Имеется лестница, все ступени которой одинаковы. Требуется указать минимальное число положений, которые гарантировали бы возможность «забраться» на любую по номеру ступеньку.
Все согласны с тем, что должно быть условие. Мы должны уметь забраться на первую ступень. Далее должны уметь с 1-ой ступеньки забраться на вторую. Потом во второй – на третью и т.д. на n-ую ступеньку. Конечно, в совокупности же «n» утверждений гарантирует нм то, что мы сможем добраться до n-ой ступеньки.

Посмотрим теперь на 2, 3,…., n положение и сравним их друг с другом. Легко заметить, что все они имеют одну и ту же структуру: если мы добрались до k ступеньки, то можем забраться на (k+1) ступеньку. Отсюда становится естественной такая аксиома для справедливости утверждений, зависящих от «n»: если предложение A(n), в котором n – натуральное число, выполняется при n=1 и из того, что оно выполняется при n=k (где k – любое натуральное число), следует, что оно выполняется и для n=k+1, то предположение A(n) выполняется для любого натурального числа n.

Пример 3. Доказать, что число диагоналей выпуклого n-угольника равно n(n-3)/2.

Решение: 1) При n=3 утверждение справедливо., ибо в треугольнике $A_3=3(3-3)\backslash2=0$ диагоналей.

2) Предположим, что всяком выпуклом k-угольнике имеется $A_k=k(k-3)\backslash 2$ диагоналей. Докажем, что тогда в выпуклом (k+1)-угольнике число диагоналей $A_{k+1}=(k+1)(k-2)\backslash 2$.

Пусть $A_1A_2A_3\dots A_kA_{k+1}$-выпуклый (k+1)-угольник. Проведём в нём диагональ A_1A_k. Чтобы подсчитать общее число диагоналей этого (k+1)-угольника нужно подсчитать число диагоналей в k-угольнике $A_1A_2\dots A_k$, прибавить к полученному числу k-2, т.е. число диагоналей (k+1)-угольника, исходящих из вершины A_{k+1}, и, кроме того, следует учесть диагональ A_1A_k.

Таким образом, $A_{k+1}=A_k+(k-2)+1=k(k-3)/2+k-1=(k+1)(k-2)/2$. Вследствие принципа математической индукции утверждение верно для любого выпуклого n-угольника.

<u>Логические задачи, решаемые математической индукции</u>

1. В квадрате 2011×2011 клеток вырезана одна произвольная клетка. Докажите, что оставшуюся часть всегда можно разрезать на трех клеточные уголки вида буквы Г.

Доказательство. Поскольку $2011=6\cdot 335+1$, требуемое утверждение будет доказано, если мы докажем утверждение задачи для квадратов размером $(6n+1)\times(6n+1)$ индукцией по $n\in N$.

Сначала докажем, что утверждение справедливо при $n=1$ для квадрата 7×7.

Действительно, из соображений симметрии следует, что достаточно рассмотреть только случаи, когда вырезанная клетка лежит в одном из квадратов 2×2, закрашенных на рис. 1–3, где показано, как разрезать оставшуюся часть.

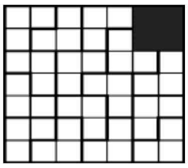
Рис. 1.

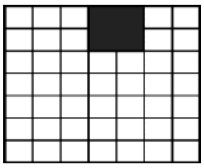
Рис. 2.

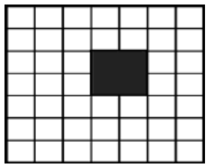
Рис. 3.

Пусть утверждение доказано для некоторого значения $k\in N$.
Докажем его для квадрата размером $(6k+7)\times(6k+7)$. Для этого в одном из углов данного квадрата поместим квадрат размером $(6k+1)\times(6k+1)$, покрывающий вырезанную клетку и удовлетворяющий предположению индукции, оставшуюся же часть разрежем на прямоугольники размером 2×3, а затем и на уголки.

2. Найдите все натуральные числа $k, k > 1$, удовлетворяющие условию: для некоторых натуральных m и $n, m \neq n$ числа $km+1$ и $kn+1$ получаются друг из друга перестановкой в обратном порядке цифр десятичной записи этих чисел.

Решение. Пусть числа k^m+1 и k^n+1, $m < n$, удовлетворяют условию задачи. Тогда они имеют одинаковое число цифр, следовательно, $k\neq 10$ и справедливо неравенство: $10(k^m+1)>kn^n+1$.

Случай $2m<n$ невозможен, так как тогда $n \geq 2m+1 \Rightarrow k^n+1 \geq k^{2m+1} > k^{2m+1} > k^{2m} + k^m = k^m(k^m+1)$.
Поэтому $k^m < 10 \Rightarrow k^n+1 = k^m+1$, что противоречит неравенству $m < n$.
Поэтому $2m \geq n \Rightarrow m \geq n-m \Rightarrow k^{nn}+1 > (k^{n-m}-1)(k^m+1) \Rightarrow k^{n-m}-1< 10$ и $k^{n-m} < 9$, так как $k^{n-m} \neq 10$.
Так как число $(k^n+1)-(k^m+1)$ делится на 9; т. е. кратно 9, поскольку суммы цифр этих чисел равны, то $k^ь$ делится на 3, поскольку $k^{m-ь}-1< 9$. В случае $k \geq 6 \Rightarrow n-m=1$ и $k^ь+1$ – число, имеющее столько же цифр, сколько и число $(k-1)(k\,m+1)$, меньшее числа k^m+1, начинается с цифры 1, а, значит, число
K^m+1 этой цифрой кончается, что невозможно, так как $k<10$.
Остается единственная возможность: $k=3 \Leftrightarrow m=3, n=4$.

3. Докажите, что любое натуральное число, не превосходящее $n!$, можно представить как сумму не более чем n натуральных чисел, являющихся различными делителями числа $n!$.

Доказательство. При n=3 утверждение справедливо. Действительно, всего имеется четыре натуральных числа, не превосходящих $3!=6 \Rightarrow 3=2+1; 4=3+1; 5=3+2; 6=3+2+1$ и все они представимы требуемым образом. Предположим, что утверждение справедливо для n=k.

Докажем, что в таком случае оно справедливо и для n=k+1. Пусть дано произвольное натуральное число $m \leq (k+1)!$. Разделив m на (k+1) с остатком, получим

$$m=(k+1)\cdot d + r,\ 0 \leq r \leq k \text{ и } d \leq k.$$

По предположению индукции существуют различные делители $d_1, d_2,\dots, d_p;\ p \leq k$ числа k! такие, что $d = d_1+ d_2+\dots+ d_p \Rightarrow m=(k+1)d_1 + (k+1)d_2 + \dots + (k+1)d_p + r$ – искомое представление числа m Действительно, в сумме $p+1\leq k+1$ слагаемых, все они различны и являются делителями числа $(k+1)!$. Последнее слагаемое меньше остальных и является делителем числа $(k+1)!$, так как $r < k+1$.

4. Дан квадрат 64 на 64. Из него вырезана одна клетка. .Докажите, что оставшуюся часть можно разрезать на уголки из трех клеток.

. Доказательство. Верно для любого квадрата размером 2n×2n. Проверка по индукции.

5. Докажите, что $2m + n - 2 \geq mn$ при любых натуральных m, n.

Доказательство. $2m+n-2 = 2m - 1\ n - 1 \geq mn$.

6. *Для данного натурального числа n выписываются все дроби вида 1/pq, где числа p и q взаимно простые, 0 < p< q n и p + q> n.*

Докажите, что сумма всех таких дробей ровна 1/2.

*Решение****:*** Эту задачу можно решить, используя метод индукции.

При n=1 утверждение выполняется: 1/(1·1)=1.

При переходе от n-1 к n нужно откинуть все дроби 1/(pq), где числа p и q взаимно простые, $p< q$ и $p+ q=n$, и прибавить все дроби 1/(pn), где числа p и n взаимно простые и $p< n$.

Пусть 1/(pq) – одна из откинутых дробей.

Поскольку 1/(pq) = 1/(p·(n -q)) = 1/(pn) + 1/(n·(n -p)), то его отбрасывание из суммы компенсируется возникновением двух новых дробей 1/(pn) и 1/(n·(n -p)), которые подходят в условие задачи. Таким образом, при переходе от n -1 к n сумма не меняется.